Chapitre 26

Séries numériques

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On suppose que les termes généraux des séries sont dans $\mathbb{K}$.

1 Séries numériques

1.1 Définitions

Définition 26.1

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$$

  Cette suite (S_n) est généralement notée $\sum u_n$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou encore $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

- Le scalaire $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelé somme partielle d'ordre n (de la série $\sum u_n$).

Une série est donc un cas particulier de suite, et tous les résultats vus pour les suites peuvent s'appliquer aux séries (on en rappelera la plupart). Attention au vocabulaire : le terme général de la *série* $\sum u_n$ est u_n mais le terme général de la *suite* (S_n) est S_n.

Définition 26.2

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ est convergente si la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} u_k$ admet une limite *finie* quand n tend vers $+\infty$. On note alors la limite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad \in \mathbb{K}$$

La valeur de la limite, i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est appelée la somme de la série $\sum u_n$.
Si la série $\sum u_n$ n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Remarque. Si on demande d'étudier la nature d'une série, il s'agit de déterminer si elle est convergente ou divergente (comme pour une suite).

Exemple 1. Étudier la nature de la série $\sum (-1)^n$.

On prendra garde aux différentes notations qui n'ont pas la même signification :

- $\sum u_n$ est la série de terme général u_n : c'est donc un cas particulier de suite. Cela a donc du sens de dire qu'elle converge, diverge, qu'elle est croissante, etc.
- $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est un élément de $\mathbb{K}$ égal à $u_0 + \cdots + u_n$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est, lorsqu'elle existe, la limite de $\sum_{k=0}^{n} u_k$ quand n tend vers $+\infty$, ou encore la limite de la suite $\sum u_n$ (et on appelle cette limite la somme de la série). On ne peut donc écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qu'après avoir justifié son existence.

1.2 Extensions et propriétés évidentes

Extension $\sum_{n\geq n_0} u_n$ Il peut arriver que la suite (u_n) ne soit définie qu'à partir d'un certain rang n_0, auquel cas on note la série

$$\sum_{n\geq n_0} u_n$$

Dans ce cas, la somme partielle et la somme de la série sont :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

On peut vérifier facilement que $\sum u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ont la même nature.

Divergence grossière. Si S_n est la somme partielle de la série $\sum u_n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_0 = S_0 \qquad \text{et} \qquad u_n = S_n - S_{n-1}$$

Cela permet de déduire la Proposition suivante.

Proposition 26.3 (Divergence grossière)

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors $u_n \to 0$.

Démonstration. En effet, si on note ℓ la somme de la série (donc la limite de la somme partielle S_n), alors pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = S_n - S_{n-1} \to \ell - \ell = 0$$

□

En particulier, si le terme général u_n ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ est divergente. On parle de divergence *grossière* :

Définition 26.4

Une série $\sum u_n$ telle que u_n ne tend pas vers 0 est dite grossièrement divergente (et est divergente).

Série télescopique

Définition 26.5 (Série télescopique)

On appelle série télescopique une série $\sum u_n$ dont le terme général est écrit sous la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Proposition 26.6 (Lien suite-série)

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0$$

Exemple 2. La série $\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ est une série télescopique : elle diverge car la suite $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Cependant, il n'y a pas de divergence grossière de la série $\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ car pour tout $n \geq 2$:

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) \times \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \to 0$$

Exemple 3. La série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est une série télescopique : elle converge car la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. La somme vaut donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0 - \frac{1}{\sqrt{1}} = -1$$

1.3 Séries classiques

Proposition 26.7

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série de terme général q^n est appelée série géométrique de raison q. Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$, et sa somme vaut alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration. Si $|q| \geq 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|q^n| = |q|^n \geq 1$, donc q^n ne peut pas tendre vers 0 : la série diverge grossièrement.

Si $|q| < 1$, alors $q \neq 1$ et la somme partielle vaut, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \to \frac{1}{1 - q} \qquad \text{car } |q| < 1$$

□

Proposition 26.8

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$

Démonstration. On va appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto e^{tz}$$

Cette application est de classe C^∞ sur $[0, 1]$. De plus, on remarque que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad f^{(k)}(t) = z^k e^{tz}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a en particulier

$$\forall t \in [0, 1] \qquad \left| f^{(n+1)}(t) \right| = \left| z^{n+1} e^{tz} \right| = |z|^{n+1} e^{t\mathrm{Re}(z)}$$

et donc

$$\forall t \in [0, 1] \qquad \left| f^{(n+1)}(t) \right| \leq M \qquad \text{avec} \qquad M = |z|^{n+1} e^{\mathrm{Re}(z)}$$

Ainsi, par l'inégalité de Taylor-Lagrange appliqué à la fonction f au point 0 et à l'ordre n, on a :

□

Exemple 4. La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est appelée la série harmonique. Elle est divergente (cf séries de Riemann ci-dessous).

Exemple 5. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est appelée une série de Riemann. Elle est convergente ssi $\alpha>1$.

La série harmonique constitue donc le "point de bascule" vers la divergence.

1.4 Propriétés

Proposition 26.9

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries convergentes. Alors pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ la série $\sum(\lambda u_n+\mu v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$$

Autrement dit, toute combinaison linéaire de séries convergentes est une série convergnete : l'ensemble des séries convergentes forme un s.e.v. de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. De plus, l'application qui à une série convergente associe sa somme est linéaire.

Exemple 6. Soit $\sum u_n$ une série convergente et $\sum v_n$ une série divergente. Montrer que $\sum(u_n+v_n)$ diverge.

Remarque. La Proposition et l'exemple ci-dessus montrent en particulier que l'on ne change pas la nature d'une série en lui ajoutant une série convergente.

Attention ! Il est tout à fait possible que $\sum(u_n+v_n)$ soit convergente alors que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soit divergentes. Les exemples fourmillent ! Plus généralement, avant d'écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$$

il faut s'assurer que toutes ces sommes aient un sens (ou au moins deux d'entre elles, car alors la troisième a un sens et se déduit des deux autres).

2 Séries à termes positifs

2.1 Généralités

On s'intéresse ici à des séries $\sum u_n$ où le terme général u_n est un réel positif. On appelle cela une série à termes positifs. On considère donc $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ dans cette section.

Proposition 26.10

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ sa somme partielle (de rang n). Alors :

- $\sum u_n$ converge ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
- $\sum u_n$ tend vers $+\infty$ ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée.

Ainsi, ou bien $\sum u_n$ converge, ou bien elle tend vers $+\infty$.

Pour déterminer la nature de $\sum u_n$, on peut donc vérifier si la suite des sommes partielles (S_n) est majorée. Toutefois, il est souvent plus facile d'invoquer un argument de comparaison.

2.2 Théorèmes de comparaison

Proposition 26.11

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq u_n \leq v_n$$

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge (et les deux limites sont $+\infty$).

Si la comparaison $u_n \leq v_n$ n'est valable qu'à partir du rang n_0, on peut appliquer le théorème ci-dessus aux séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$: on obtient ainsi le même résultat, mais en cas de convergence on a seulement

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$

Exemple 7. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Proposition 26.12

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs. Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Démonstration. Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, on a

$$\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 2$$

si bien que

$$\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq 2v_n$$

- Si $\sum u_n$ converge, $\sum \frac{1}{2}v_n$ aussi donc $\sum v_n$ également.
- Si $\sum u_n$ diverge, $\sum 2v_n$ aussi donc $\sum v_n$ également.

Finalement, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature. □

Exemple 8. Déterminer la nature de la série $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

2.3 Comparaison série-intégrale

Méthode

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose de plus que f est décroissante. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall t \in [n, n+1] \qquad f(t) \leq f(n)$$

ce qui permet d'écrire, en intégrant en t de n à $n+1$:

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$$

On montre de même que $f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$, ce qui permet d'écrire

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

En sommant ces inégalités pour n allant de 1 à N avec $N \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

$$\int_1^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \int_0^{N} f(t)dt$$

Cette méthode fournit un encadrement de la série $\sum f(n)$: elle peut permettre de montrer la convergence ou la divergence d'une série par comparaison, car les intégrales ci-dessus sont souvent plus faciles à calculer.

Cette méthode marche également si f est croissante, mais en pratique c'est beaucoup plus rare. Enfin, cela fonctionne encore si on suppose f continue par morceaux sur tout segment de $[0, +\infty[$, mais la grande majorité des cas concerne les fonctions continues.

Exemple 9. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Proposition 26.13

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée une série de Riemann. Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.

- Si $\alpha \leq 0$, la série diverge grossièrement.
- Si $0 < \alpha < 1$, alors $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, si bien que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

  $$\frac{1}{n^\alpha} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

  ce qui après sommation pour n allant de 1 à $N \in \mathbb{N}^*$ donne

  $$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} &\geq \int_1^{N+1} t^{-\alpha} dt \\ &= \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right]_1^{N+1} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left((N+1)^{1-\alpha} - 1\right) \end{aligned}$$

  et comme $1-\alpha > 0$, le dernier terme tend vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$. Donc par comparaison, la série de Riemann diverge dans ce cas.
-

□

3 Séries alternées

3.1 Reste d'une série convergente

Définition 26.14

Soit $\sum u_n$ une suite *convergente*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Autrement dit, si on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} u_k$, alors $R_n = S_\infty - S_n$. En particulier, on a toujours

$$R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Cette définition n'a pas de sens si $\sum u_n$ diverge, car alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ ne serait pas défini.

Exemple 10. On considère la série géométrique $\sum q^n$ avec $q \in \mathbb{K}$ et $|q| < 1$. Déterminer le reste de cette série.

3.2 Théorème des séries alternées

Définition 26.15

$\sum u_n$ est dite une série alternée lorsqu'on peut écrire $u_n = (-1)^n v_n$ avec (v_n) une suite réelle de signe constant.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de u_{n+1} est opposé à celui de u_n.

Théorème 26.16 (Théorème des séries alternées)

Soit $\sum(-1)^n v_n$ une série où (v_n) est une suite réelle (positive) **décroissante** qui **converge vers 0**. Alors :

1. La série $\sum(-1)^n v_n$ est convergente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$$
vérifie $|R_n| \leq v_{n+1}$.
3. En notant S_n la somme partielle de rang n et S la somme de $\sum(-1)^n v_n$, alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \tag{$*$}$$

Comme la suite (v_n) est décroissante et a 0 pour limite, on montre facilement qu'elle est nécessairement positive.

Démonstration. On va montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Regardons leur monotonies. D'une part,

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2} v_{2n+2} + (-1)^{2n+1} v_{2n+1} \\ &= v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0 \end{aligned}$$

car (v_n) est décroissante. Donc (S_{2n}) est décroissante. D'autre part,

$$\begin{aligned} S_{2n+3} - S_{2n+1} &= (-1)^{2n+3} v_{2n+3} + (-1)^{2n+2} v_{2n+2} \\ &= -v_{2n+3} + v_{2n+2} \geq 0 \end{aligned}$$

donc (S_{2n+1}) est croissante. Enfin, comme (v_n) tend vers 0,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{n+1} v_{n+1} \to 0$$

Donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes : elles convergent vers la même limite qu'on note ℓ. De plus, ces suites encadrent la limite :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n}$$

Comme $S_{2n} \to \ell$ et $S_{2n+1} \to \ell$, on peut montrer que $S_n \to \ell$ (en revenant à la définition avec $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$...). Ainsi, $\sum(-1)^n v_n$ est convergente et sa somme S vaut ℓ. On a donc montré les première et troisième assertions.

Montrons enfin la deuxième assertion. Pour les rangs impairs, d'après $*$, on a

$$\begin{aligned} |R_{2n+1}| &= |S - S_{2n+1}| = S - S_{2n+1} \\ &\leq S_{2n} - S_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} v_{2n+1} = v_{2n+1} \end{aligned}$$

et on montre de manière similaire l'inégalité $|R_{2n}| \leq v_{2n}$. □

Exemple 11. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

4 Séries à termes complexes

Proposition 26.17

Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \operatorname{Re} u_n$ et $\sum \operatorname{Im} u_n$ convergent, et si c'est le cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re} u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im} u_n$$

Le lemme qui suit n'a que peu d'intérêt pratique mais servira à démontrer le théorème en début de section suivante. Étant donné un réel x, on note

$$x^+ := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad x^- := \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

on a donc les relations suivantes :

$$x^- \geq 0, \qquad x^+ \geq 0, \qquad x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-$$

Lemme 26.18

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent, et si c'est le cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-$$

5 Séries absolument convergentes

Définition 26.19

On dit que la série $\sum u_n$ est <u>absolument convergente</u> si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

On notera que $\sum |u_n|$ est à termes positifs, ce qui permet d'appliquer les résultats associés à ce type de série.

Théorème 26.20

Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors, comme

  $$0 \leq u_n^- \leq |u_n| \qquad \text{et} \qquad 0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$$

  on en déduit par comparaison que les séries $\sum u_n^-$ et $\sum u_n^+$ sont convergentes. Ainsi, par linéarité, $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$ est également convergente.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a
$$0 \leq |\operatorname{Re} u_n| \leq |u_n| \qquad \text{et} \qquad 0 \leq |\operatorname{Im} u_n| \leq |u_n|$$
et donc par comparaison les séries $\sum \operatorname{Re} u_n$ et $\sum \operatorname{Im} u_n$ sont *absolument* convergentes. Comme ce sont des séries à termes réels, par ce qui précède elles sont convergentes. Ainsi par linéarité, $\sum u_n = \sum(\operatorname{Re} u_n + i \operatorname{Im} u_n)$ est également convergente.

□

Exemple 12. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^n}}{n^2}$ est convergente : en effet pour tout $n \geq 1$ on a $\left|\frac{e^{in^n}}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (c'est une série de Riemann). Donc par comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^n}}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

Remarque. Une série convergente n'est pas nécessairement absolument convergente. On a vu par exemple que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais elle ne converge pas absolument car $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique).

Remarque. Si une série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Proposition 26.21

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

En particulier, si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$ et le résultat est encore vrai.

Méthode

Quand on cherche uniquement la nature d'une série, il peut être avantageux de chercher un "développement limité" lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple 13. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left(\sin\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n}\right)$.

6 Familles sommables

6.1 Introduction et rappels

Jusqu'à présent, on a toujours étudié des sommes finies. Lorsqu'on était en présence de termes de la forme $\sum_{i\in I} a_i$, on supposait toujours que :

- Ou bien l'ensemble I était fini (par exemple $I = [\![0,n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}$).
- Ou bien que I était infini mais que la famille $(a_i)_{i\in I}$ était presque nulle (polynômes, famille libre infinie, etc.)

Dans cette section, on va s'affranchir de ces restrictions. On supposera donc que I est un ensemble quelconque, éventuellement infini, et que $(a_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$. On supposera parfois quelques hypothèses supplémentaires.

On sera notamment amené à manipuler des quantités infinies dans les calculs. On rappelle / définit donc quelques règles de calculs sur la demi-droite réelle achevée $[0,+\infty]$:

$$\forall x \in [0,+\infty] \qquad x \leq +\infty$$

$$\begin{array}{rl} \forall x \in [0,+\infty] & x+(+\infty) = +\infty \\ \forall x \in]0,+\infty] & x \times (+\infty) = +\infty \\ & 0 \times (+\infty) = 0 \end{array}$$

Cette dernière règle ne correspond pas à l'usage, notamment pour les calculs de limites. Elle permet cependant de rendre valide ce genre de calculs :

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (0\times 1) = 0 \times \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = 0 \times (+\infty)$$

6.2 Familles sommables de réels positifs

Voici la définition "officielle" :

Définition 26.22

On suppose que $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs. On appelle <u>somme (de la famille)</u> $(a_i)_{i\in I}$ la quantité

$$\sum_{i\in I} a_i := \sup\left\{\sum_{i\in J} a_i \;\middle|\; J\subset I,\quad J \text{ fini}\right\} \quad \in [0,+\infty]$$

On dit que la famille $\sum_{i\in I} a_i$ est <u>sommable</u> si $\sum_{i\in I} a_i < +\infty$.

Autrement dit, la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable s'il existe un réel M tel que pour toute partie finie J de I, on ait

$$\sum_{i\in J} a_i \le M$$

Si un tel réel M existe, alors le plus petit de ces réels est égal à la somme $\sum_{i\in I} a_i$.

Exemple 14 (Cas où $I = [\![0,N]\!]$ est fini)**.** Soit $N\in\mathbb{N}$ et $(a_i)_{0\le i\le N}$ une famille (finie) de réels positifs. La famille $(a_i)_{0\le i\le N}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i=0}^{N} a_i$$

.

Exemple 15 (Cas $I=\mathbb{N}$)**.** On suppose que $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs. Lorsque $I=\mathbb{N}$, alors :

- Dire que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable revient à dire que la série $\sum_{n\ge 0} a_n$ est convergente et dans ce cas

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_i$$

- Dire que la famille $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable revient à dire que la série $\sum_{n\ge 0} a_n$ est divergente et dans ce cas on s'autorise à écrire :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$$

On donne donc un sens plus large à l'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ comparé à la Définition 26.2. Ainsi, à condition que chaque terme a_n soit *positif*, il est toujours possible d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, cette quantité étant finie ssi la série converge, et sinon elle vaut $+\infty$.

Exemple 16. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty \quad$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.

6.3 Famille sommable de nombres complexes

Définition 26.23

Soit $(a_k)_{k\in I}$ une famille de complexes. On dit que la famille $(a_k)_{k\in I}$ est <u>sommable</u> si la famille $(|a_k|)_{k\in I}$ est sommable.

- Si $(a_k)_{k\in I}$ est une famille de réels, alors (a_k) est sommable ssi (a_k^+) et (a_k^-) sont sommables et si c'est le cas, on définit la <u>somme</u> de la famille $(a_k)_{k\in I}$ comme le réel

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k\in I} a_k^+ - \sum_{k\in I} a_k^-$$

- Si $(a_k)_{k\in I}$ est une famille de complexes, alors (a_k) est sommable ssi $(\operatorname{Re} a_k)$ et $(\operatorname{Im} a_k)$ sont sommables et si c'est le cas, on définit la <u>somme</u> de la famille $(a_k)_{k\in I}$ comme le complexe

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k\in I} \operatorname{Re} a_k + \sum_{k\in I} \operatorname{Im} a_k$$

6.4 Propriétés

Proposition 26.24 (Linéarité)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ des familles sommables et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors la famille $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i$$

Proposition 26.25 (Comparaison)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de complexes. On suppose que

$$\forall i \in I \qquad |a_i| \leq |b_i|$$

Alors si $(b_i)_{i\in I}$ est sommable, il en va de même pour $(a_i)_{i\in I}$.

On peut également dire que si $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, alors $(b_i)_{i\in I}$ non plus.

Proposition 26.26 (Distributivité)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles de nombres complexes. On suppose qu'on est dans l'un des deux cas suivants :

- Pour tous i, j, les nombres a_i et b_j sont réels et positifs.
- Ou les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont sommables.

Alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} \sum_{j\in J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

Pour que cette propriété soit valide, il est essentiel qu'on soit sous la convention $0 \times (+\infty) = 0$ (prendre le cas $a_i = 0$ et $b_j = 1$).

La famille $(a_i b_j)$ est ainsi indexée par $I \times J$. Le théorème qui suit concerne un cadre plus général : celui d'une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ indexée par $I \times J$.

Proposition 26.27 (Théorème de Fubini)

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de complexes. On suppose qu'on est dans l'un des deux cas suivants :

- Pour tous i, j, les nombres $a_{i,j}$ sont réels et positifs.
- Ou la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable.

Alors on peut intervertir l'ordre de sommation :

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$$

En particulier, si $I = J = \mathbb{N}$, on peut réécrire la conclusion ainsi :

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$$

L'hypothèse de positivité ou de sommabilité est essentielle pour intervertir.

Proposition 26.28 (Sommation par paquets)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Soit $(A_j)_{j\in J}$ une partition de l'ensemble I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.
2. Pour tout $j \in J$,
   (a) La famille $(a_i)_{i\in A_j}$ est sommable ; on note $\sigma_j = \sum_{i\in A_j} a_i$ la somme associée et
   (b) La famille $(\sigma_j)_{j\in J}$ est sommable.

Et dans ce cas, on a la formule :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in A_j} a_i\right)$$